



Problema I.	Parțial	Punctaj
Barem subiect I		10 p
a) $m_1 \cdot a = m_1 g \sin \alpha - T - \mu_1 m_1 g \cos \alpha$ $m_2 \cdot a = m_2 g \sin \alpha + T - \mu_2 m_2 g \cos \alpha$ $a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos \alpha}{m_1 + m_2}$ $a = 2,9 \frac{m}{s^2}$ $T = \frac{m_1 m_2 g (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2}$ $T = 0,36 N$	1p 2p 1p	
b) După ce corpul de masă m_1 ajunge la blocator, tensiunea din fir se anulează cele două corpuri deplasându-se cu accelerațiile $a_2 = g (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) = 2 \frac{m}{s^2}$ $a_{\text{urcare}} = g (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) = 6,5 \frac{m}{s^2}$ $a_{1c} = g (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) = 3,5 \frac{m}{s^2}$ Înainte ca m_1 să atingă blocatorul corpurile au vitezele egale $v_1 = v_2 = \sqrt{2 \cdot a (L - l)}$ $v_1 = v_2 = \sqrt{2 \cdot 2,9 \frac{m}{s^2} (8m - 4m)} = 4,8166 \frac{m}{s} \approx 4,82 \frac{m}{s}$ După ciocnirea cu blocatorul corpul de masă m_1 urcă cu viteza inițială $v_1' = k \cdot v_1$	1p 3p 1p	



Într-un timp $t_u = \frac{k \cdot v_1}{a_{lu}}$ parcurgând distanța $d = \frac{(k \cdot v_1)^2}{2 \cdot a_{lu}}$. Timpul de coborâre $t_c = \sqrt{\frac{2d}{a_{lc}}} = \frac{k \cdot v_1}{\sqrt{a_{lc} \cdot a_{lu}}}$ Din condiția ca m_2 să ciocnescă pe m_1 până la a doua atingere a blocatorului de către m_1 în timpul $T = t_u + t_c$ corpul de masă m_2 parcurge distanța de la mijlocul planului până la blocator, adică $L - l = 4m$ $L - l = v_2 \cdot T + \frac{a_2 T^2}{2}$ După rezolvarea ecuației de gradul al doilea în care $T = k \cdot 1,75$ $3k^2 + 8,43k - 4 = 0$ rezultă soluția convenabilă $k \approx 0,41 \approx 0,4$ ca fiind valoarea minimă a coeficientului de restituire ,pentru valori mai mici , corpul de masă m_1 va atinge de mai multe ori blocatorul până să fie ciocnit de m_2.	1p	
c) Pentru valoarea lui $k = 0,8$ corpul de masă m_1 va urca cu o viteză inițială $v_1 = 0,8 \cdot 4,8166 \frac{m}{s} \approx 3,85 \frac{m}{s}$ Din condiția de întâlnire $L - l = v_2 \cdot t + \frac{a_2 t^2}{2} + v_1 \cdot t - \frac{a_{lu} t^2}{2}$ $4 = 4,82t + \frac{2t^2}{2} + 3,85t - \frac{6,5t^2}{2} \quad 2,25t^2 - 8,67t + 4 = 0 \Rightarrow t = 0,415s$ Vitezele celor două corpuri înainte de ciocnire vor fi $u_1 = (3,85 - 6,5 \cdot 0,415) \frac{m}{s} = 1,15 \frac{m}{s}$ $u_2 = (4,82 + 2 \cdot 0,415) \frac{m}{s}$ $m_2 \cdot u_2 - m_1 \cdot u_1 = (m_1 + m_2) u$ După ciocnirea plastică	4p	



$u = \frac{0,4 \cdot 5,65 - 0,6 \cdot 1,115}{0,6 + 0,4} \frac{m}{s} = 1,57 \frac{m}{s}$ orientată spre baza planului $d_1 = 3,85 \cdot 0,415 - \frac{6,5 \cdot (0,415)^2}{2} (m)$ Corpurile s-au întâlnit la distanța $d_1 = 1,598m - 0,56m = 1,04m$ Viteza corpului cu masa $m_1 + m_2$ cu care acesta ciclește blocatorul $u_0 = \sqrt{u^2 + 2 \cdot a_c \cdot d_1} = 2,57 \frac{m}{s}$ Imediat după ciocnire noul corp va avea viteza $u_i = 0,8 \cdot 2,57 \frac{m}{s} = 2,06 \frac{m}{s}$ Noul corp se va deplasa pe planul înclinat cu accelerațiile $a_c = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos \alpha}{m_1 + m_2}$ $a_u = - \frac{(m_1 + m_2) g \sin \alpha + (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos \alpha}{m_1 + m_2}$ $a_c = 2,9 \frac{m}{s^2}; a_u = 7,1 \frac{m}{s^2}$ Valorile numerice în modul La prima urcare după ciocnirea blocatorului $t_{1u} = \frac{u_i}{a_u} \quad d_1 = \frac{u_i^2}{2a_u} \quad t_{1c} = \sqrt{\frac{2d_1}{a_c}} = \frac{u_i}{\sqrt{a_u a_c}}$ $u_2 = a_c t_{1c} = a_c \frac{u_i}{\sqrt{a_c a_u}} \quad u_2' = k \cdot u_2 = k \cdot a_c \frac{u_i}{\sqrt{a_c a_u}}$ $t_{2u} = \frac{u_2'}{a_u} = \frac{k a_c u_i}{a_u \sqrt{a_c a_u}} \quad d_2 = \frac{u_2'^2}{2a_u} \quad t_{2c} = \sqrt{\frac{2d_2}{a_c}} = \frac{u_2'^2}{\sqrt{a_u a_c}} = \frac{k a_c u_i}{(\sqrt{a_u a_c})^2}$ $u_3 = a_c t_{2c} = \frac{k a_c^2 u_i}{(\sqrt{a_c a_u})^2} \quad u_3' = k \cdot u_3 = \frac{k^2 \cdot a_c^2 u_i}{(\sqrt{a_c a_u})^2}$		
--	--	--



$t_{3u} = \frac{u_3}{a_u} = \frac{k^2 a_c^2 u_i}{a_u (\sqrt{a_c a_u})^2} \quad d_3 = \frac{u_3^2}{2a_u} \quad t_{3c} = \sqrt{\frac{2d_3}{a_c}} = \frac{k^2 a_c^2 u_i}{(\sqrt{a_u a_c})^3}$ $u_4 = a_c t_{3c} = \frac{k^2 a_c^3 u_i}{(\sqrt{a_c a_u})^3} \quad u_4' = k \cdot u_4 = \frac{k^3 \cdot a_c^3 u_i}{(\sqrt{a_c a_u})^3}$ $t_{4u} = \frac{u_4'}{a_u} = \frac{k^3 a_c^3 u_i}{a_u (\sqrt{a_c a_u})^3} \quad d_4 = \frac{u_4'^2}{2a_u} \quad t_{4c} = \sqrt{\frac{2d_4}{a_c}} = \frac{k^3 a_c^3 u_i}{(\sqrt{a_u a_c})^4}$ Timpul $T = \frac{u_i}{a_u} \left(1 + \frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^2 + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^3 + \dots + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^n \right) +$ $\frac{u_i}{\sqrt{a_u a_c}} \left(1 + \frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^2 + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^3 + \dots + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^n \right)$ $T = \left(1 + \frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^2 + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^3 + \dots + \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^n \right) \left(\frac{u_i}{a_u} + \frac{u_i}{\sqrt{a_u a_c}} \right)$ $T = \left(\frac{u_i}{a_u} + \frac{u_i}{\sqrt{a_u a_c}} \right) \frac{1 - \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)} = \frac{\left(\frac{u_i}{a_u} + \frac{u_i}{\sqrt{a_u a_c}} \right)}{1 - \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)} = \frac{u_i \left(\frac{1}{a_u} + \frac{1}{\sqrt{a_u a_c}} \right)}{1 - \left(\frac{ka_c}{\sqrt{a_u a_c}} \right)}$ d) $T = \frac{2,06 \left(\frac{1}{7,1} + \frac{1}{\sqrt{7,1 \cdot 2,9}} \right)}{1 - \left(\frac{0,9 \cdot 2,9}{\sqrt{7,1 \cdot 2,9}} \right)} s \approx 1,75s$		
Oficiu	1p	1 p
Problema II	Parțial	Punctaj
Barem subiect II		10 p



a) $a_1 = \frac{(3m-2m) \cdot g}{5m} = \frac{g}{5}$	3p	3p
$v_1 = a_1 \cdot t_1 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s}$		
$d_1 = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2} \Rightarrow d_1 = 4m$		
$v_1 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h-d)}$		
$v_1 = 14 \frac{m}{s}$		
b) Din momentul lansării în $t_1 = 2s$ tensiunea $3ma_1 = 3mg - T_1 \Rightarrow T_1 = 3mg - 3ma_1 = 3mg - \frac{3mg}{5}$ $T_1 = 24N$	1p	3p
După $t_1 = 2s$ se desprinde bila 1 $T_2 = 2mg$ $T_2 = 20N$ constantă în intervalul 2s:3s moment în care se desprinde și bila 2	1p	
$a_{3,4,5} = -\frac{10}{3} \frac{m}{s^2}$ $ma_3 = mg - T_3 \Rightarrow T_3 = mg - ma_3$ $T_3 = \frac{40}{3} N = 13,3N ; 13,3N$ $t_{op} = \frac{4}{\frac{10}{3}} s = 1,2s$	1p	



Tensiunea T_3 ; 13,3N în intervalul 3s;4,2s		
c) $a_1 = \frac{(3m-2m) \cdot g}{5m} = \frac{g}{5}$ $a_1 = 2 \frac{m}{s}$	0,5p	3p
$v_{rel} = 2 \frac{m}{s}$ $v_{1,2,3} = v_{4,5} = 1 \frac{m}{s}$ unde am notat cu $v_{1,2,3}$ viteza bilei 1,2 sau 3, și cu $v_{4,5}$ viteza bilei 4 sau 5 $v_{1,2,3} = a_1 \cdot \tau_1 \Rightarrow \tau_1 = 0,5s$		
După $t_1 = 2s$ bilele 2,3,4 și 5 se deplasează uniform cu $a_2 = 0$, și viteza constantă de $v = 4 \frac{m}{s}$. Bila 1 coboară cu accelerația $g = 10 \frac{m}{s^2}$ și viteza inițială de $v = 4 \frac{m}{s}$ și ajunge la $v_1 = 6 \frac{m}{s}$ după $t = \frac{6-4}{10} s = 0,2s$ După $\tau_2 = 2s + 0,2s = 2,2s$ bila 1 are față de 2 sau 3 $v_{rel} = 2 \frac{m}{s}$	0,5p	
După încă $t_2 = 1s$ se desprinde și bila 2 care are inițial $v = 4 \frac{m}{s}$ și coboară cu accelerația $g = 10 \frac{m}{s^2}$. Bilele 3,4,5 se mișcă încetinit cu accelerația $a_3 = \frac{(m-2m) \cdot g}{3m} = -\frac{g}{3}$ $v_3 = v_{4,5} = 1 \frac{m}{s}$	0,5p	



$v_3 = 1 \frac{m}{s} = 4 \frac{m}{s} - \frac{10}{3} \frac{m}{s^2} \cdot t \Rightarrow t = 0,9s$ După $\tau_3 = 2s + 1s + 0,9s = 3,9s$ de la începutul mișcării bila 3 față de 4 sau 5 are $v_{rel} = 2 \frac{m}{s}$		
Față de bilele 1 și 2 aflate în repaus la sol, bilele 3,4 sau 5 au viteza $v_{3,4,5} = 2 \frac{m}{s}$ după $v_{3,4,5} = 2 \frac{m}{s} = 4 \frac{m}{s} - \frac{10}{3} \frac{m}{s^2} \cdot t \Rightarrow t = 0,6s$ după $\tau_4 = 2s + 1s + 0,6s = 3,6s$ de la începutul mișcării	0,5p	
Bilele 3,4 și 5 se opresc după 4,2s de la începutul mișcării. Din acest moment pornesc din repaus și se mișcă accelerat cu $a_4 = \frac{(2m - m) \cdot g}{3m} = + \frac{g}{3}$ Acestea ajung la vitezele $v_3 = v_{4,5} = 1 \frac{m}{s}$ după $t = 0,3s$ După $\tau_5 = 4,2s + 0,3s = 4,5s$ de la începutul mișcării bila 3 are față de 4 sau 5 viteza relativă $v_{rel} = 2 \frac{m}{s}$	0,5p	
După $\tau_6 = 4,2s + 0,6s = 4,8s$ de la începutul mișcării bilele 3,4,5 au față de 1 și 2 (în repaus la sol) viteza relativă $v_{rel} = 2 \frac{m}{s}$	0,5p	
Oficiu	1p	1 p



Problema III		
Barem subiect III		10 p
$a_1 = \frac{m_1 g - k \cdot v}{m_1}$	1p	3p
$a_1 = 0 \Rightarrow k \cdot v_{\max} = m_1 \cdot g$	1p	
$k = \frac{m \cdot g}{v_{\max}}$		
$k = 0,2 \frac{kg}{s}$		
$a_1 = g - \frac{k}{m_1} \cdot v$	1p	
$a_1 = 10 \frac{m}{s^2} - \frac{0,2 \frac{kg}{s}}{0,2kg} \cdot 5 \frac{m}{s} = 5 \frac{m}{s^2}$		
b) masa corpului din gheață în funcție de înălțime	1p	3p
$m(h) = m_2 - \beta(H - h)$		
La sol , când $h = 0 \Rightarrow \frac{m_2}{4} = m_2 - \beta \cdot H$	1p	
$\beta = \frac{3m_2}{4H} \Rightarrow \beta = 0,015 \frac{kg}{m}$		
$m(h) = 0,2 - 0,015 \cdot (H - h)$	1p	
La înălțimea $h = 5m \Rightarrow m = 0,2kg - 0,015 \cdot 5kg = 0,125kg$		



c) $F_2 = \alpha(H - h)$ La $h = 0 \Rightarrow F_2 = \alpha \cdot H = \frac{m_2}{4} \cdot g$ $\alpha = 0,05 \frac{kg}{s^2}$	1p	3p
$a_2 = \frac{m \cdot g - \alpha(H - h)}{m} = g - \frac{\alpha(H - h)}{m} = g - \frac{\alpha(H - h)}{m_2 - \beta(H - h)}$	1p	
Pentru $h = 5m \Rightarrow a_2 = 10 \frac{m}{s^2} - \frac{0,05 \frac{kg}{s} \cdot 5m}{0,2kg - 0,015 \frac{kg}{m} \cdot 5m} = 8 \frac{m}{s^2}$	1p	
Oficiu	1p	1p

Barem propuse de: prof.dr. Luciu Alexandrescu-Col Naț. "Dr.I.Meșotă" Brașov
prof.Moraru Florin-Col.Naț 'N.Bălcescu' Brăila