

Proba Teoretică
Barem

Subiect 1	Parțial	Punctaj
Barem subiect 1		10
<i>Sarcina de lucru 1</i>		4,50
a) Deoarece incidența este normală, planul fantei va coincide cu o suprafață de undă a unei incidente plane. Punctele suprafeței de undă din planul fantei devin, în acord cu principiul Huygens - Fresnel, surse de unde secundare sferice, coerente și în fază. Împărțind aria fantei în fâșii cu lățimea foarte mică, toate având aceeași arie, atunci fiecare fâșie poate fi considerată ca o sursă de unde secundare, fazele, frecvența și amplitudinile lor a_0 fiind egale. Pentru razele difractate de marginile fantei (Fig. 1), sub același unghi θ față de normala la paravan, diferența de drum optic este $\delta = a \sin \theta,$ iar diferența de fază $\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta.$ Pentru razele difractate pe direcția fasciculului incident, amplitudinea rezultantă este $A_0 = Na_0$, unde N este numărul de surse secundare. Pentru razele difractate sub unghiul θ față de normala la paravan, amplitudinea rezultantă este dată de diagrama fazorială din Fig. 2, unde lanțul de fazori corespunzând undelor emise de fiecare sursă secundară se transformă dintr-un contur poligonal într-un arc de cerc, care subîntinde un unghi la centrul cercului egal cu φ. Prin urmare: $A = 2R \sin \frac{\varphi}{2},$ iar $R = \frac{Na_0}{\varphi} = \frac{A_0}{\varphi},$ așa încât $A = A_0 \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}.$	0,25 0,25 1,75 0,25 0,25 0,25	

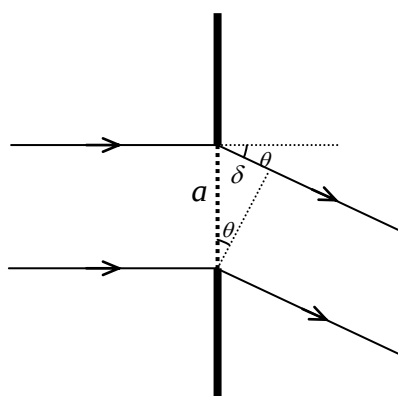


Fig. 1

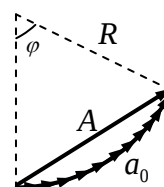
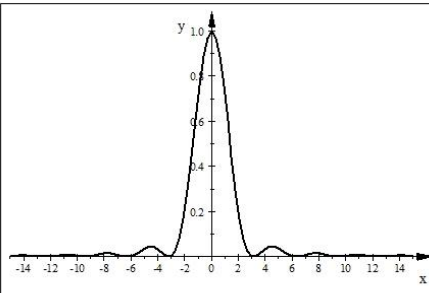


Fig. 2

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem

În concluzie $I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \right)^2.$ Maximul central (v. Fig. 3) se obține pentru $\theta = 0$ și are valoarea $I = I_0$, în timp ce minimele ($I_{\min} = 0$) se obțin pentru $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$, adică pentru $\varphi_m = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^*$, deoarece pentru $m = 0$ se obține maximul central. Ținând cont de expresia pentru diferența de fază, condiția de formare a minimelor devine $a \sin \theta_m = m\lambda.$ <u>Observații:</u> - Maximele secundare, mărginite de două minime vecine, au lățimea λ / a, iar maximul central are lățimea dublă, $2\lambda / a$; - Cu cât a scade, lățimea maximului central crește, astfel încât pentru $a \approx \lambda$, $\theta_1 \approx \frac{\pi}{2}$, adică maximul central se va întinde pe tot ecranul.	 Fig. 3	0,25	
b) Admițând că maximele secundare sunt simetrice, ele se realizează pentru $a \sin \theta_m = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda,$ de unde $\varphi_{\max} = (2m+1)\pi,$ ceea ce înseamnă că intensitatea lor relativă va fi $\frac{I_m}{I_0} = \left(\frac{2}{(2m+1)\pi} \right)^2.$ În concluzie, $\frac{I_1}{I_0} = \frac{4}{9\pi^2} = 0,045$, $\frac{I_2}{I_0} = \frac{4}{25\pi^2} = 0,016$ și $\frac{I_3}{I_0} = \frac{4}{49\pi^2} = 0,008$. Intensitatea relativă a maximului central este $\frac{I_0}{I_{\text{tot}}} = \frac{I_0}{I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} I_m} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{m=1}^{\infty} I_m}{I_0}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right)} = \frac{2\pi^2}{3\pi^2 - 8}.$ Numeric, $\frac{I_0}{I_{\text{tot}}} = 91,35\%$.	0,25 0,25 0,25 3x0,25 0,25 0,25	0,25 0,25 0,25 3x0,25 0,25 0,25	2,00

- Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
- Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem

c) Lărgimea imaginii fantei este $\Delta y = a + 2L\theta_1 = a + 2L \frac{\lambda}{a} = 10,1 \text{ mm} \cong 1 \text{ cm},$ iar lungimea ei $\Delta x = l + 2L\theta_1' = l + 2L \frac{\lambda}{l} = 1,01 \text{ cm} \cong 1 \text{ cm}.$	2x0,25 0,25	0,75
Sarcina de lucru 2		4,50
a) Figurile de difracție produse de fiecare fantă se suprapun, dar, în plus, fasciculele difractate de fiecare fantă interferă. Prin urmare, dacă distanța dintre centrele celor două fante este $d = a + b$, atunci diferența de fază dintre undele coerente care provin de la cele două fante este $\varphi_d = k\delta_d = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta,$ unde θ este unghiul de difracție. Deoarece intensitatea fiecăreia dintre cele două unde care interferă este cea dată de difracția pe o fantă $I_a = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\varphi_a}{2}}{\frac{\varphi_a}{2}} \right)^2,$ atunci intensitatea totală a undelor care interferă este $I_d = I_a + I_a + 2\sqrt{I_a \cdot I_a} \cos \varphi_d = 2I_a (1 + \cos \varphi_d) = 4I_a \cos^2 \frac{\varphi_d}{2}.$ Prin urmare, figura de interferență va fi modulată de figura de difracție (Fig. 3). Maximele de interferență se obțin pentru $\cos \frac{\varphi_d}{2} = \pm 1$, adică $\varphi_d = 2m\pi$, de unde rezultă că $d \sin \theta_m = m\lambda,$ care este tocmai condiția cerută.	0,25 0,25 0,25 0,25	1,00
b) Maximele de interferență care pot fi observate sunt cele care nu se suprapun peste minimele de difracție. Din condiția pentru obținerea maximelor de interferență $d \sin \theta_m = m\lambda$ și cea pentru obținerea minimelor de difracție $a \sin \theta_m = m'\lambda$, rezultă că $m = m' \frac{d}{a} = 16m', \quad m' = \pm 1, \pm 2, \dots$	0,25	0,75

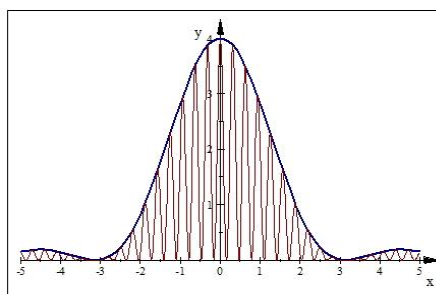


Fig. 4

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem

Așadar dispar maximele de interferență de ordinele $\pm 16, \pm 32, \pm 48$ etc. În concluzie, în interiorul maximului principal de difracție se formează, împreună cu maximul de ordin zero de interferență, un număr de maxime egal cu $2\left(\left[\frac{d}{a}\right]-1\right)+1=2\left[\frac{d}{a}\right]-1=2\cdot 16-1=31,$ iar în interiorul maximelor secundare de difracție, care au lărgimea egală cu jumătatea lărgimii maximului principal, se formează un număr de 15 maxime de interferență egal cu $\left[\frac{d}{a}\right]-1=16-1=15.$	0,25	
c) Din condiția de maxim de interferență, $d \sin \theta_m = m\lambda$ și de minim de difracție, $a \sin \theta_m = m' \lambda$, rezultă că numărul teoretic de maxime de interferență este: $2m_{\max} + 1 = 2\left[\frac{d}{\lambda}\right] + 1 = 6401.$ Cu toate acestea, deoarece dispăre un număr de maxime egal cu numărul total al minimelor nule de difracție $2m_{\max}' = 2\left[\frac{a}{\lambda}\right] = 400,$ atunci numărul de maxime de interferență care se pot observa este $2m_{\max} + 1 - 2m_{\max}' = 6001.$ În condițiile de mai sus, dacă toate aceste maxime ar fi observabile, numărul de maxime secundare de difracție observabile ar fi $\frac{6001-31}{15} = 398$, adică câte 199 de o parte și de alta a maximului central. Numărul de maxime de interferență care se observă experimental este egal cu $31 + 4 \cdot 15 = 91$.	0,25 0,25 0,25 0,25	1,25
d) Dacă s este distanța dintre două maxime de interferență vecine, măsurată pe un ecran plasat în planul focal imagine al lentilei, atunci condiția de observabilitate a acestora este $s = f \Delta \theta \geq s_{\min},$ unde $s_{\min}$ este distanța minimă dintre două puncte vecine de pe ecran care pot fi observate ca fiind distincte, atunci când se află la distanța δ de ochi: $s_{\min} = \delta \cdot \beta_{\min} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$	0,25 0,25	1,50

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

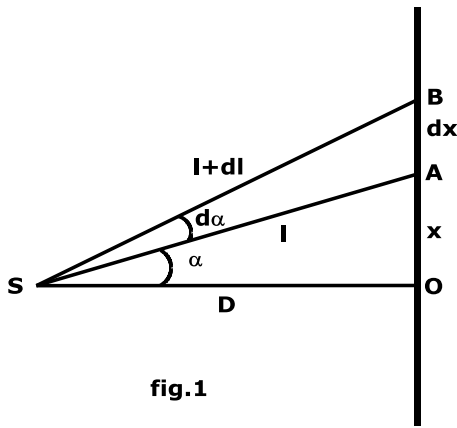
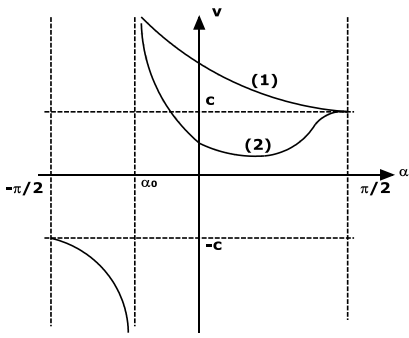
Proba Teoretică
Barem

Distanța unghiulară $\Delta\theta$ dintre două maxime vecine rezultă din scrierea condițiilor pentru maximele de interferență		
$\begin{cases} d \cdot \theta_m = m\lambda \\ d \cdot (\theta_m + \Delta\theta) = (m+1)\lambda \end{cases}$	0,25	
de unde		
$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d} = 3,125 \cdot 10^{-4}.$	0,25	
Prin urmare		
$f \geq \frac{\delta\beta_{\min} d}{\lambda} = 24 \text{ cm.}$	2x0,25	
Oficiu		1

Problemă propusă de
Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași

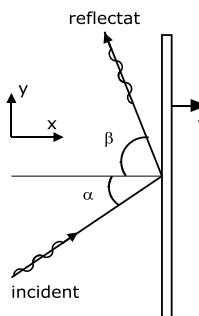
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem Subiectul 2

Subiect 2. Fotoni..."ciudați"	Parțial	Punctaj
1. Barem subiect 2		10
 fig.1 a. Conform fig.1, spre B fotonii pleacă mai târziu decât spre A cu $dt_1 = \frac{d\alpha}{\omega}$ și "zboară" până la B cu dt_2 în plus față de cei spre A, $dt_2 = \frac{dl}{c}$. Deci spotul apare în B după $dt = dt_1 + dt_2$ față de cel din A. Așadar, viteza de deplasare a spotului din A în B este $v = \frac{dx}{dt}$ Din $l = \frac{D}{\cos \alpha} \Rightarrow dl = D \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ și $dt_2 = \frac{D}{c} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ Deci $dt = \frac{d\alpha}{\omega} + \frac{D}{c} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ Din $\tan \alpha = \frac{x}{D} \Rightarrow x = D \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{D}{\cos^2 \alpha} d\alpha$. Prin urmare $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{D}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{\frac{d\alpha}{\omega} + \frac{D}{c} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha}$, adică $v = \frac{\omega D}{\cos^2 \alpha + \frac{\omega D}{c} \sin \alpha}$	1	3
Graficul are aspectul din fig.2  fig.2	0,5	
Prin α_0 trece asimptota verticală pentru care se anulează numitorul $\sin \alpha_0 = \frac{\omega D}{2c} - \sqrt{\left(\frac{\omega D}{2c}\right)^2 + 1}$	0,25	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică Barem Subiectul 2

Curba (1) se obține dacă $\omega D > 2c$ și curba (2) dacă $\omega D < 2c$	0,25	
Deoarece în timp ce α ia valori de la $-\pi/2$ la $+\pi/2$, viteza spotului ia valori negative și pozitive, înseamnă că spotul se poate mișca în ambele sensuri pe perete. Pentru a evita efectele remanenței imaginii pe rețină, trebuie ca viteza unghiulară să nu fie prea mare, și atunci se poate observa cum spotul se mișcă și spre stânga și spre dreapta pe perete (un fel de dedublare a fascicului).	0,5	
Fenomenul se poate vedea însă numai pentru distanțe D suficient de mari (de ordinul miilor de kilometri). Dacă $\omega D \ll c$ se obține $v(\alpha) = \frac{\omega D}{\cos^2 \alpha}$, ca și cum fasciculul laser ar putea avea viteza infinită.	0,25	
Viteza spotului poate depăși valoarea c . Aceasta însă nu contrazice TRR, pentru că cu ajutorul lui nu se poate transmite o informație sau un semnal dintr-un punct al planului peretelui în altul.	0,25	
b.i) Vom considera o ciocnire elastică între foton și oglindă și vom aplica pe baza diagramei din figura alăturată, legile de conservare ale energiei și impulsului.  $\begin{cases} \frac{h}{\lambda} \cos \alpha + Mv = -\frac{h}{\lambda'} \cos \beta + M(v + \Delta v_x) \\ \frac{h}{\lambda} \sin \alpha = \frac{h}{\lambda'} \sin \beta \\ \frac{hc}{\lambda} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{M(v + \Delta v_x)^2}{2} \end{cases}$	0,5	4
Ecuatiile 1 și 3 pot fi aduse la forma: $M \Delta v_x = \frac{h}{\lambda} \cos \alpha + \frac{h}{\lambda'} \cos \beta$ $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + Mv \Delta v_x + \frac{(M \Delta v_x)^2}{2M}$ Având în vedere că $M \rightarrow \infty$ (oglină grea), se obține $\lambda' = \lambda \frac{c + v \cos \beta}{c - v \cos \alpha}$ (*)	0,5	
iar din ecuația 2 din sistem, $\sin \alpha = \frac{\sin \beta (c - v \cos \alpha)}{c + v \cos \beta}$	0,25	
Această ecuație duce, după ridicarea ei la pătrat și efectuarea calculelor corespunzătoare, la o ecuație de gradul al doilea în $\cos \beta$, care are două soluții: Soluția I: $\cos \beta = \frac{-2 \frac{v}{c} + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \alpha}{1 + \frac{v^2}{c^2} - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha}$, care reprezintă legea reflexiei în acest caz.	0,5	

- Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
- Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.



Proba Teoretică
Barem Subiectul 2

și Soluția II: $\cos \beta_2 = \frac{2 \frac{v}{c} \cos^2 \alpha - \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \alpha}{1 + \frac{v^2}{c^2} - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha}$, de unde rezultă ușor că $\beta_2 = \pi - \alpha$. Aceasta ar însemna că fotonul trece dincolo de oglindă, ceea ce nu poate avea loc.	0,25 0,25	
ii) În cazul în care viteza oglinzii face un unghi φ cu normala, se înlocuiește doar v cu $v \cos \varphi$ și se obține: $\cos \beta = \frac{-2 \frac{v \cos \varphi}{c} + \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi\right) \cos \alpha}{1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha \cos \varphi}$	0,25	
Analizând soluția I, se poate observa că pentru $v > 0$, există un interval de valori pentru α, pentru care β este mai mare decât 90°. Acest fenomen este cunoscut sub numele de „reflexie înainte” și începe la un unghi α_{critic} care rezultă din formula dedusă pentru $\beta = 90^\circ$	0,25	
$\cos \alpha_{critic} = \frac{2 \frac{v}{c}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$. Fenomenul încetează dacă $\cos \alpha_{max} = \frac{v}{c}$, adică componenta vitezei fotonului pe direcția mișcării oglinzii este egală cu viteza oglinzii.	0,25	
Lungimea de undă a fotonului reflectat se află revenind la formula (*) unde înlocuim soluția I și după câteva calcule se ajunge la: $\lambda' = \lambda \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2} - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha}, \text{ respectiv } \lambda' = \lambda \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi}{1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{v}{c} \cos \alpha \cos \varphi}$	0,5	
Din formula pentru lungimea de undă a fotonului reflectat, obținută mai sus, se obține imediat că $\lambda' = 3\lambda$. Dacă spectrul vizibil este cuprins aproximativ între 400 nm și 800 nm, atunci lumina reflectată va fi în întregime în infraroșu. Deci în condițiile date, Einstein nu-și poate vedea chipul.	0,5	
c. Unghiul de deviație este adimensional. Evident, el trebuie să depindă de masa Soarelui, de distanța minimă față de Soare și de constanta atracției universale. Numai cu acestea nu se poate obține o mărime adimensională, deci introducem și viteza luminii, c. Obținem: $\langle \theta \rangle_{SI} = \langle M_s^\alpha r^\beta k^\gamma c^\delta \rangle = 1$ $M^\alpha L^\beta \frac{L^{3\gamma}}{M^\gamma T^{2\gamma}} \frac{L^\delta}{T^\delta} = 1$ $L^{\beta+3\gamma+\delta} M^{\alpha-\gamma} T^{-\delta-2\gamma} = 1$	0,25	2
Rezultă sistemul: $\begin{cases} \beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ -\delta - 2\gamma = 0 \end{cases}$ cu soluțiile $\alpha = \gamma$, $\beta = -\gamma$ și $\delta = -2\gamma$		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.



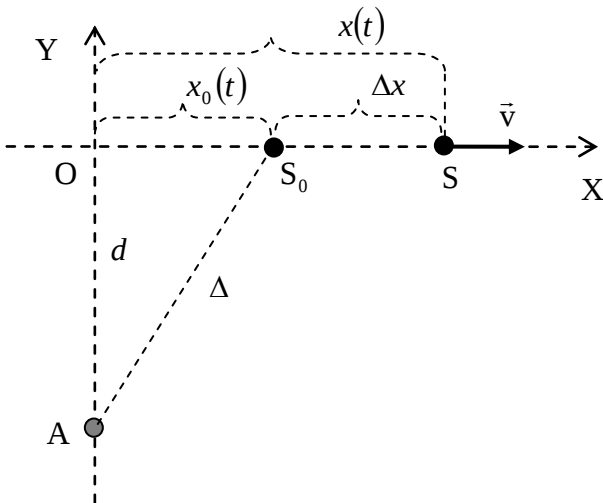
Proba Teoretică
Barem Subiectul 2

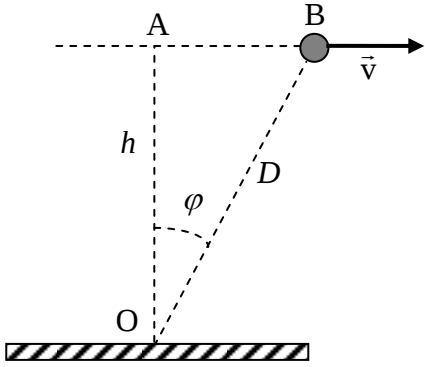
Deci cele patru mărimi formează o combinație adimensională dacă sunt grupate ca un raport de forma: $\left(\frac{kM_s}{rc^2}\right)^\gamma$. Deci unghiul de deviere poate fi o funcție de forma $\theta = A \cdot f\left(\left(\frac{kM_s}{rc^2}\right)^\gamma\right)$	0,25	
Cea mai simplă dependență este $\theta = A \frac{kM_s}{rc^2}$ Constanta A nu poate fi determinată prin analiză dimensională. Din TRG rezultă valoarea 4. Iar din gravitația newtoniană, 2. Noi vom alege 1.	0,25	
Calculul numeric dă: $\theta = 1 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{7 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 2,117 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \approx 0,4''$	0,50	
Pentru ca Pământul să devină gaură neagră, este rezonabil să presupunem că $\theta \approx 1 \text{ rad}$. Astfel toți fotonii, ar cădea pe Pământ.	0,25	
Rezultă: $R \approx \frac{kM_p}{c^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 4 \text{ mm}$	0,50	
Oficiu		1

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

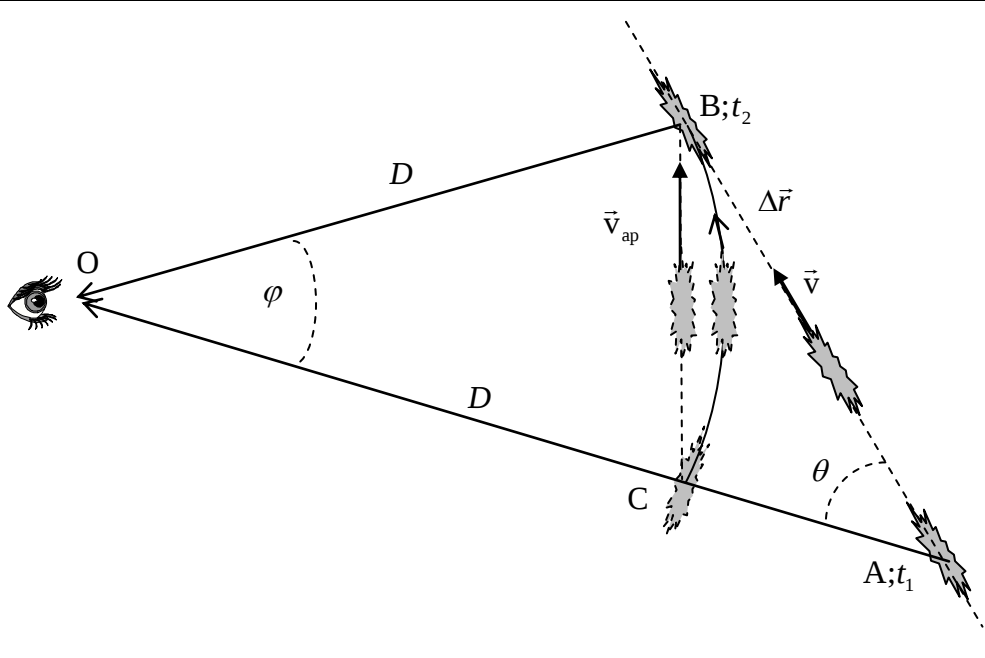


PROBLEMA 3

Barem de notare	Parțial	Punctaj
Problema 3		10
a)		3 p
Așa cum indică desenul din figura alăturată, la momentul inițial, $t_0 = 0$, sursa de lumină trece prin originea O a sistemului de coordonate XY și la momentul t ea este în poziția $S(x)$, unde: $x = x(t) = vt.$  Observatorul din A primește lumina trimisă de sursă atunci când aceasta se afla în poziția $S_0(x_0)$. Acestui semnal luminos, ca să ajungă de la sursă la observator, parcurgând distanța: $\Delta = \sqrt{x_0^2 + d^2},$ îi trebuie timpul: $\tau = \frac{\Delta}{c} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c}.$ După timpul τ de la emiterea semnalului luminos, sursa a ajuns în poziția $S(x)$, parcurgând distanța: $\Delta x = x - x_0 = v\tau,$ astfel încât: $\frac{x - x_0}{v} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c}.$	0,50	
Evident, deoarece $x = x(t)$, din relația anterioară rezultă că și $x_0 = x_0(t)$, aceasta fiind coordonata de poziție a sursei în aprecierea observatorului. Într-adevăr, dacă sursa a fost în poziția $S_0(x_0)$ la momentul $(t - \tau)$ și semnalul luminos a avut nevoie de timpul τ ca să ajungă la observator, atunci, recepția semnalului la observator s-a făcut la momentul t, exact momentul când sursa este în poziția S. Ca urmare, coordonata de poziție x_0 este apreciată de observator la momentul t, astfel		

încât, pentru observator, $x_0 = x_0(t)$: $\frac{vt - x_0}{v} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c};$ $(c^2 - v^2)x_0^2 - 2vctc^2x_0 + v^2(t^2c^2 - d^2) = 0;$ $x_0(t) = \frac{vctc^2 \pm \sqrt{v^2t^2c^4 - (c^2 - v^2)v^2(t^2c^2 - d^2)}}{c^2 - v^2};$ $x_0(t) = v \frac{c^2t - \sqrt{v^2c^2t^2 + d^2(c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2},$ ceea ce evidențiază o mișcare neuniformă apreciată de observator pentru sursa de lumină.	1,50	
Pentru calculul vitezei instantanee și a accelerației instantanee ale sursei apreciate de observator, utilizând noțiuni cunoscute din analiza matematică, rezultă: $w = \frac{dx_0}{dt} = \frac{vc^2}{c^2 - v^2} \left[1 - \frac{v^2t}{\sqrt{v^2c^2t^2 + d^2(c^2 - v^2)}} \right];$ $a = \frac{dw}{dt} = - \frac{v^3c^2d^2}{[v^2c^2t^2 + d^2(c^2 - v^2)]^{3/2}} < 0,$ ceea ce dovedește caracterul încetinit al mișcării sursei, apreciată de observator. Evident, pentru $t = 0$, se obține valoarea maximă a accelerației apreciată de observator pentru mișcarea sursei de lumină: $a_{\max} = \left \frac{v^3c^2d^2}{d^3(c^2 - v^2)^{3/2}} \right = \frac{v^3}{cd} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2}.$	1,00	
b)		2 p
Dacă la momentul $t = 0$ obiectul luminos trece prin punctul cel mai apropiat de observator, punctul A, așa cum indică desenul din figura alăturată și dacă la momentul oarecare, $\tau > 0$, obiectul luminos a ajuns în punctul B, parcurgând distanța: $x = v_0 \tau = h \tan \varphi,$ atunci observatorul din O va afla de trecerea obiectului luminos prin punctul B la ora $t > \tau$: $t = \tau + \frac{D}{c} = \tau + \frac{\frac{h}{\cos \varphi}}{c} = \tau + \frac{h}{c \cos \varphi}.$	0,50	
Viteza obiectului luminos, v, înregistrată de observatorul din O la ora $t > \tau$, corespunzătoare momentului τ, atunci când obiectul trece prin punctul B, va fi: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = v_0 \frac{1}{\frac{dt}{d\tau}};$		

$\frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\tau + \frac{h}{c \cos \varphi} \right); \quad \varphi = \varphi(\tau);$ $\frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{h}{c} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right) = 1 + \frac{h}{c} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{d\tau};$ $x = v_0 \tau = h \tan \varphi,$ $dx = v_0 d\tau = h d(\tan \varphi) = h d \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = h \frac{\cos \varphi d \sin \varphi - \sin \varphi d \cos \varphi}{\cos^2 \varphi};$ $d \sin \varphi = \cos \varphi d \varphi; \quad d \cos \varphi = -\sin \varphi d \varphi;$ $v_0 d\tau = h \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi};$ $\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{v_0}{h} \cos^2 \varphi;$ $\frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{v_0}{c} \sin \varphi;$ $v = v_0 \frac{\frac{1}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}};$ $v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{c} \sin \varphi}.$ Observatorul din O vede obiectul luminos trecând prin punctul B, mai târziu decât momentul când s-a întâmplat această trecere, din cauza valorii finite a vitezei de propagare a luminii.	1,50	
c)		4 p
Un jet incandescent relativist pleacă din centrul unui nucleu galactic activ, deplasându-se pe direcția AB, cu viteza v așa cum indică desenul din figura alăturată. Să admitem că la momentul t_1 o rază de lumină părăsește jetul în punctul A și o altă rază de lumină părăsește jetul la momentul t_2 în punctul B, astfel încât: $\Delta t = t_2 - t_1;$ $AB = \Delta r = v \Delta t.$		

	0,50	
Observatorul din punctul O nu poate aprecia mișcarea reală a jetului. El apreciază mișcarea aparentă a jetului, în proiecție pe sfera cerească, de-a lungul arcului de cerc CB. Dacă unghiul φ este foarte mic, atunci $BC \approx \perp AC$, astfel încât: $BC = AB \cdot \sin \theta = v \cdot \Delta t \cdot \sin \theta;$ $AC = AB \cdot \cos \theta = v \cdot \Delta t \cdot \cos \theta;$ $BC \approx D \cdot \varphi;$ $BC = v \cdot \Delta t \cdot \sin \theta = D \cdot \varphi = CB.$ La observatorul din punctul O, cele două semnale luminoase ajung la momentele τ_1 și respectiv τ_2, astfel încât: $\tau_1 = t_1 + \frac{AO}{c} = t_1 + \frac{AC + CO}{c} = t_1 + \frac{v \cdot \Delta t \cdot \cos \theta + D}{c};$ $\tau_2 = t_2 + \frac{BO}{c} = t_2 + \frac{D}{c};$ $\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = \Delta t - \frac{v \cdot \Delta t \cdot \cos \theta}{c};$ $\Delta \tau = \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \Delta t; \beta = \frac{v}{c};$ $\Delta \tau = (1 - \beta \cos \theta) \Delta t; \Delta t = \frac{\Delta \tau}{1 - \beta \cos \theta}.$	1,50	
Observatorul nu poate aprecia mișcarea reală a jetului. În proiecție pe sfera cerească, observatorul apreciază mișcarea aparentă a jetului pe direcția BC, cu viteza transversală: $v_{ap} = \frac{BC}{\Delta \tau} = \frac{D \cdot \varphi}{\Delta \tau} = \frac{v \cdot \Delta t \cdot \sin \theta}{\Delta \tau} = \frac{v \cdot \Delta t \cdot \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta) \Delta t};$ $v_{ap} = \frac{v \cdot \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}; \beta_{ap} = \frac{v_{ap}}{c}; v_{ap} = \beta_{ap} \cdot c;$ $\frac{v \cdot \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} = \beta_{ap} \cdot c; \beta_{ap} = \frac{\frac{v}{c} \cdot \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}; \beta = \frac{v}{c};$ $\beta_{ap} = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} = f(\theta),$	2,00	

astfel încât, impunând condiția de maxim pentru această funcție, rezultă: $\frac{d\beta_{ap}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \right) = 0;$ $\frac{\beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} - \frac{(\beta \sin \theta)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = 0;$ $\beta \cos \theta (1 - \beta \cos \theta)^2 = (1 - \beta \cos \theta)(\beta \sin \theta)^2;$ $\cos \theta (1 - \beta \cos \theta) = \beta \sin^2 \theta;$ $\cos \theta = \beta,$ astfel încât: $\beta_{ap,max} = \frac{\beta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}};$ $v_{ap,max} = c \beta_{ap,max} = \frac{c\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; v_{ap,max} = \frac{c \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$ $v = \frac{v_{ap,max}}{\sqrt{1 + \frac{v_{ap,max}^2}{c^2}}}; v_{ap,max} = 3,6 \cdot c; v \approx 0,96 \cdot c,$ reprezentând viteza reală a jetului incandescent relativist.		
Oficiu		1,00